

中图法分类号: TP391 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2011)06-0947-06

论文索引信息: 蒋建国, 郭艳蓉, 郝世杰, 詹曙, 李鸿, Ian Ross. 贝叶斯框架下的非参数估计 Graph Cuts 分割算法 [J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(6): 947-952

贝叶斯框架下的非参数估计 Graph Cuts 分割算法

蒋建国^{1),2)}, 郭艳蓉¹⁾, 郝世杰¹⁾, 詹曙¹⁾, 李鸿³⁾, Ian Ross⁴⁾

¹⁾(合肥工业大学计算机与信息学院, 合肥 230009)

²⁾(安全关键工业测控技术教育部工程研究中心, 合肥 230009)

³⁾(安徽医科大学第一附属医院骨科, 合肥 230022)

⁴⁾(London Health Science Center, London Ontario Canada N6A 5A5)

摘要: 假设图像中各像素灰度值是具有一定概率分布的随机变量, 由贝叶斯定理, 正确分割观测图像等价于求出具有最大后验概率的实际图像估计。在此框架下, 提出了一种改进型 Graph Cuts 图像分割算法。与传统 Graph Cuts 分割算法相比, 该算法在模型建立上有两个方面的改进: 1) 将模糊 C 均值聚类引入数据约束能量函数来得到各像素在某个标记下的概率, 改善了收敛性能; 2) 使用非参数方法估计图像的统计分布, 然后用此统计量构成图像分割的先验概率, 并保证分割结果的局部平滑。由于非参数估计是由样本直接估计得到的结果, 特别适用于小样本和分布函数不恒定的情况, 因此拓展了算法的适用范围。实验结果表明, 改进算法在遥感图像分割和医学图像分割中均提高了分割精度, 证明了该算法的有效性。

关键词: Graph Cuts; 贝叶斯图像分割; 模糊 C 均值; 非参数估计

Graph Cuts segmentation based on Bayesian nonparametric estimation

Jiang Jianguo^{1),2)}, Guo Yanrong¹⁾, Hao Shijie¹⁾, Zhan Shu¹⁾, Li Hong³⁾, Ian Ross⁴⁾

¹⁾(School of Computer and Information, Hefei University of Technology, Hefei 230009 China)

²⁾(Engineering Research Center of Safety Critical Industry Measure and Control Technology, Ministry of Education, Hefei 230009 China)

³⁾(Department of Orthopaedics, The First Affiliated Hospital of Anhui Medical University, Hefei 230022 China)

⁴⁾(London Health Science Center, London Ontario Canada N6A 5A5)

Abstract: Suppose each pixel of an image is a random variable under some kind of probability distribution, according to the Bayes theorem, the segmentation of the original images is equivalent to their maximum a posteriori probability estimation. In this framework, we proposed an improved image segmentation algorithm based on Graph Cuts. The construction of the original Graph Cuts model is improved in two aspects. First, fuzzy C-means clustering is introduced into the energy function of data restriction. With the help of fuzzy clustering method, the energy function's performance of constringency is improved. Second, nonparametric method is used to estimate the statistical distribution of the image, which work as the prior probability used in image segmentation. With the presented method, the results of segmentation are guaranteed to be smooth locally. Since the nonparametric estimation is directly evaluated from the samples, and is suitable for situations of small samples and variable distribution functions, the applicability of our algorithm is extended. Experimental results have shown that the proposed algorithm has good performance on segmenting remote sensing images and medical images.

Keywords: Graph Cuts; Bayesian image segmentation; fuzzy C-means; nonparametric estimation

收稿日期: 2009-12-28; 修回日期: 2010-04-08

基金项目: 教育部博士点基金项目(20060359004); 教育部留学归国人员科研启动基金项目(413117); 安徽省 2010 高校省级自然科学研究重点项目(KJ2010A193)。

第一作者简介: 蒋建国(1955—), 男, 教授, 博士生导师。主要研究方向为图像分析、模式识别、分布式智能系统、DSP 技术应用等。E-mail: jgjiang@hfut.edu.cn。

0 引言

图像分割将图像中具有特殊含义和较强关联的不同区域区分开来,用于提取图像中定量信息和特征。在医学图像和遥感图像等研究领域中,由于它们的成像原理本质上多数与可见光成像不同,其图像噪声、弱边界、区域灰度分布混叠等问题显得尤为突出。有效的图像分割是计算机辅助诊断、可视化人体、目标侦测识别的重要基础和前提。基于图论的图像分割方法是近年来新的研究热点。该方法从本质上可以分为两类:一类是谱聚类方法,它利用图像像素间的一致性和相似性,使用近似谱分析技术对像素进行自动的聚类,如 Shi 和 Malik^[1];另一类是 Boykov 等人提出的 Graph Cuts 方法^[2-3]。它将图像中的像素看做是图中的节点,因而将图像分割问题转化为求图的最小割问题,是一种离散空间上的全局最优算法。将该方法用于 n 维图像的最优边界和区域提取^[4-7]、图像复原^[8]和图像匹配^[9]等均取得了不错的效果。

文献[10]指出,对于各种能量优化算法来说,代价函数更小却不一定带来更优的性能。因此如何定义更精确的代价函数比单纯改善优化技术更加有效^[2-3]。但文献[3]仅使用 Potts 模型来对图像中的灰度不连续性进行描述,而文献[2]将边界梯度性质引入 Potts 模型中,却忽视了像素灰度概率分布间关联;Rother 等人提出的迭代型 Grab Cuts 算法^[4]基于的是图像符合高斯混合模型这一假设。针对这种情况,本文在文献[2]的基础上提出了一种贝叶斯框架下的 Graph Cuts 图像分割方法,除了对灰度分布进行非参数估计,还需要根据像素之间的关联度对空间的接近性进行建模。但与 Grab Cuts 等方法采用传统高斯混合模型进行建模不同,该算法采用 Parzen 窗进行非参数估计,不要求图像符合特定的概率分布,适合小样本下的模型建立,因而可以用于多种图像的分割问题。实验结果证明改进算法所使用的一致性特征在合成图像、遥感图像和核磁共振图像等应用领域均有效。

1 Graph Cuts

Graph Cuts 是一种基于图论的全局优化算法。该方法的主要思想是将图像映射为带权无向图

$G = \langle V, E, W \rangle$,把图像中 n 个像素视为图中节点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 为在某个邻域系统下相邻节点之间的边集。根据图像中像素之间的空间关联度以及局部相似性特征来构造该图中各个边的权值 $W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$,从而把对原始图像的分割转化为对图的标号问题。

设一个割 C 将节点集 V 分为两个互不相交且互补的集合 A 和 B ,则割 C 的容量为它所经过的边权值之和, $c(C) = \sum_{p \in A, q \in B} w(p, q)$ 。最后图的标号过程可以通过使用组合优化中的最大流/最小割准则求得最小割 $\arg \min_c c(C)$ 来实现,从而得到近似的全局最优结果。

2 无监督贝叶斯图像分割

基于贝叶斯框架的 Graph Cuts 分割方法,首先在最大后验概率(MAP)形式下,通过 Gibbs 分布表示观测数据和标号场的相互依赖性;在能量函数模型构造中,利用模糊 C 均值估计出当前像素和标号间的一致性程度,用非参数估计保证空间局部光滑;最后利用 Graph Cuts 算法进行 MAP 估计得到最后标号结果。

2.1 贝叶斯框架

在贝叶斯框架下对图像进行分割,就是从观测到的图像场得到标记场的概率,将其最大化,从而得到一个最可能的分割,即最大化后验概率 MAP。

设定义在网格 M 上的图像 I 对应于图 $G = \langle V, E, W \rangle$ 。由于图像中各个像素点的灰度值是具有一定概率分布的随机变量,故图中节点用随机变量 $X = \{x_s, s \in V\}$ 来表示。假设随机变量 $x \in X$ 在离散空间 $L = \{0, 1, \dots, r-1\}$ 中取值,这时可以将图像分割问题转化为对图 G 进行 r 个贝叶斯标号问题,即如何找到一个标号场 X 使得为亮度观测场 $Y = \{y_s, s \in V\}$ 到标号集 L 的一个映射。以二元分割为例, $r = 2$ 并且 $L = \{0, 1\}$ 为包含两个元素的标号集,其中 0 代表背景,1 代表目标。

根据贝叶斯准则得到随机变量 x 下 y 的后验概率 $p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)}$ 。其中 $p(x)$ 为先验概率, $p(y|x)$ 为似然函数。假设概率 $p(y)$ 满足均匀分布,得到 $p(x|y) \propto p(y|x)p(x)$ 。

因此 MAP 估计 \hat{x} 就等价于

$$\hat{x} = \arg \max_{x \in X} \{p(y|x)p(x)\}$$

使用 Gibbs 分布将先验概率 $p(x)$ 表示为 $p(x) = Z^{-1} \cdot \exp(-\sum_{\{p,q\} \in N(s)} V_{|p,q|}(x_p, x_q))$, 其中 $V(x)$ 为相应 Gibbs 势能, $Z = \sum_{x \in X} \exp(-V(x))$ 为归一化常数, $N(s)$ 表示像素 s 的一个邻域内的所有像素对集合。

同样可以用 Gibbs 分布模型得到标号集下图像灰度的条件概率 $p(y|x) = \frac{1}{Z'} \exp(-\sum_{s \in V} D(y_s | x))$, 其中 $D(x)$ 在标号 x 下的 Gibbs 能量函数。

综合以上条件,最大后验概率估计等价于后验能量函数 $F(x)$ 的最小化

$$\hat{x} = \arg \min_{x \in X} \{ F(x) \} = \arg \min_{x \in X} \left\{ \sum_{\{p,q\} \in N(s)} k V_{|p,q|}(x_p, x_q) + \sum_{s \in V} D(y_s | x) \right\} \quad (1)$$

式中 k 为平滑约束模型 $V_{|p,q|}$ 和数据约束模型 $D(y_s | x)$ 间的权重比。

由于存在图像噪声、弱边界以及多个目标的模糊定位等问题,使得无监督的图像分割成为了一个具有挑战性的任务。半自动图像分割方法虽然可以通过增加人工种子点来减少二义性问题,但是其人工交互还是给用户带来了不便。因此本文在保证分割效果的基础上利用模糊 C 均值进行初始聚类,从而实现一种无监督的分割方法,减小用户交互。

2.2 模型建立

由于不能使用种子点来为目标和背景构造可靠的分布模型,首先需要使用模糊 C 均值来对图像进行聚类得到一个初始标记 X_{initial} , 并根据 X_{initial} 来构造表示图像区域信息的数据约束 $D(y_s | x)$ 。

所谓数据约束就是指各个像素属于各个标号的数据开销,即当前像素和估计标号相一致程度的测度,可以通过计算出代表该像素灰度属于 x 的概率 $P(y_s | x)$ 得到。以二元分割为例, $D(y_s | x)$ 就表示将像素 s 点分别标记为 $x \in \{0, 1\}$ 下的代价,即 $D(x=0) \propto -\ln P(y_s | x=0)$ 、 $D(x=1) \propto -\ln P(y_s | x=1)$ 。

为了在无监督(无人工交互)的条件下得到概率 $P(I_s | x)$, 首先假设条件概率 $p(y_s | x)$ 是满足高斯分布,接着采用模糊 C 均值聚类得到所有像素在各个标记下的隶属度函数 $H_j = \{h(y_s | j), s \in V, j \in L\}$ 以及聚类中心 $C_j = \{c(j), j \in L\}$ 。最后由

$$p(y_s | x = j) = \frac{1}{2\pi \sqrt{|\Sigma_j|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \Delta u_j^T \cdot \Sigma_j^{-1} \Delta u_j\right)$$

得到 $\sum_{s \in V} D_s(y_s | x) = \frac{1}{2} \Delta u_j^T \cdot \Sigma_j^{-1} \Delta u_j \propto -\sum_{s \in V} \ln P(y_s | x)$, 其中 $\Delta u_j = \{y - C_j, y \in Y\}$ 表示像素 y 与第 j 个聚类中心 C_j 间的距离矢量, Σ_j 为聚类 j 的协方差矩阵。

使用模糊 C 均值聚类的优越性可由两幅模拟图像的实验结果体现。图 1 中的图(a)为被噪声污染的 star 图像和边缘被模糊化的 circle 图像,其中 star 图像目标和背景的信噪比分别为 20 dB 和 10 dB。图 3(b)(c)分别为用 C 均值聚类算法和模糊 C 均值算法对各个像素属于各个聚类中心的概率时得到的分割结果,聚类数均为 2。从图中的黑色箭头指示可以看出,使用模糊聚类比 C 均值得到的分割效果更加精确,对细节的刻画也更加准确。从运行时间上看,改进前后 star 图像的耗时由 0.304 s 减小到 0.107 s, circle 图像由 0.518 s 增加到 1.190 s, 而增加的计算量中 50% 以上是由于模糊 C 均值的计算。

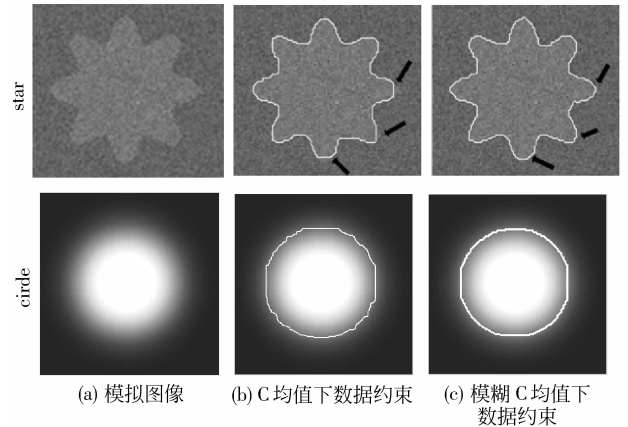


图 1 模拟图实验结果
Fig. 1 Experiment results on synthetic images

模型建立的第 2 个步骤就是使用基于核函数的 Parzen 窗估计来构造平滑性约束,使得标号估计值在每一个区域中保持平滑变化。通常用相邻像素边上的势能函数 $V_{|p,q|}(x_p, x_q)$ 来保证空间局部光滑,从而得到具有全局平滑约束条件的贝叶斯分割,即

$$\sum_{\{p,q\} \in N} V_{|p,q|} = \sum_{\{p,q\} \in N} B_{|p,q|} \delta(x_p, x_q)$$

$$\delta(x_p, x_q) = \begin{cases} 1 & x_p \neq x_q \\ 0 & x_p = x_q \end{cases}$$

式中 N 表示像素 p 的一个邻域内的所有像素对集合。对 2 维图像, N 可以采用 4 连通或者 8 连通。

对于 3 维图像, N 可以采用 26 连通区域。本文所有分割结果均采用 4 连通邻域得到。

由于图像中常常存在有大量的复杂结构, 仅仅采用相邻像素 p, q 的灰度值来判断二者是否属于同一标号存在有明显的局限性。因此利用统计信息来构造如下平滑性势能函数 $B_{|p,q|}$, 从而对邻接像素对 $\{p, q\}$ 之间标号的不连续性进行补偿, 是有意义的。

$$B_{|p,q|} = \frac{2\sigma^2}{2\sigma^2 + \beta (p(I_p) - p(I_q))^2} \frac{1}{\|p, q\|} \quad (2)$$

式中 $p(I)$ 表示灰度 I 的概率分布, σ, β 均为常数, $\beta/\alpha^2 = 1 \sim 5$ 。 $\|p, q\|$ 为邻接像素对 $\{p, q\}$ 之间的欧几里德距离。

可以看到如果 p, q 不属于同一区域, 则它们之间的标号不同, $\delta(x_p, x_q) = 1$ 。这时, 如果两个像素间的统计概率越接近, 则 $B_{|p,q|}$ 越大, p, q 位于目标和背景交界处的可能性小。反之, 则代价 $B_{|p,q|}$ 越小, 说明 p, q 位于目标和背景交界处的可能性大。

这里分割的成功与否与灰度分布 $p(I)$ 的估计正确性密切相关。为了得到最佳的分割结果应该同时进行对灰度分布的估计和分割。本工作使用 Parzen 窗估计来代替传统的 GMM 对概率分布进行估计, 从而不需要像素符合一个特定的概率分布, 并且能够更精确地估计所有密度分布。

故利用核密度估计来得到像素点 s 处的灰度概率密度函数为

$$\hat{p}(s) = \frac{1}{size(R)} \sum_{i=1}^{size(R)} \varphi(s - s_i)$$

式中 φ 为核函数, $size(R)$ 为以像素点 s 为中心 R 为半径的图像空间大小。

由于标准高斯密度函数拥有较好的平滑性质, 所以这里使用它作为核函数。此时

$$\varphi(s - s_i) = \frac{1}{\sigma'} K((s - s_i)/\sigma') = (2\pi\sigma'^2)^{-1/2} \exp\{- (s - s_i)^2 / (2\sigma'^2)\}$$

式中 σ' 为核函数的窗宽, 并且高斯核函数满足归一化条件

$$K(s) \geq 0; \int K(s) ds = 1$$

总的来说, 能量函数的模型建立的过程如下:

- 1) 根据图像的边缘、区域和统计信息来确定特征值; 2) 利用特征转换函数将特征值转换为能量函数值, 也就是图中各个边的代价值, 从而实现在保存图像边界的情况下使得标号结果足够平滑。

2.3 Graph Cuts 进行 MAP 推理

由于后验能量函数有多个局部极小值, 是非凸的, 求它的最小值是一个 NP 难的组合优化问题^[11-12]。故在将图像 I 转换成一个网络 $G = \langle V, E, W \rangle$ 进行表示后, 采用 α 扩展^[3] 来得到有效的近似解。

由于满足以下两个条件

$$\begin{cases} V_{|p,q|}(x_p, x_q) = 0 & x_p = x_q \\ V_{|p,q|}(x_p, x_q) = V_{|p,q|}(x_q, x_p) \geq 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$V_{|p,q|}(x_p, x_q)$ 是一个半度量 (semimetric) 函数, 故根据文献[3]可以使用 α 扩展对该能量函数 $F(x)$ 进行最小化得到近似最优标号。

α 扩展可以同时改变任意数目像素的标号来达到最小化的目标, 因而可以有效地跳出局部最小化点得到近似全局的推理结果。可以同时改变许多像素的标号, 实现较大移动的局部最优。

给定一个当前标号 x 和标记 α , 构造出图的结构, 并且随着每次迭代发生改变。图的原子割和 x 的一次 α 扩展标号之间存在一一对应的关系, 并且原子割的容量等于该标记下的能量, 因此找到了最小割就等于找到了使得能量函数最小的标号, 从而实现了图像分割。

2.4 算法框架

总结整个算法的思路可以得到完整的无监督 Graph Cuts 图像分割框架如图 2 所示。

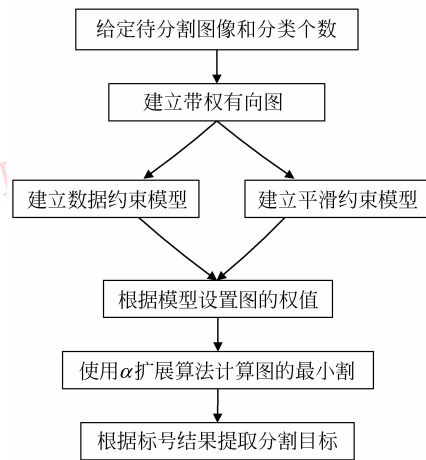


图 2 算法框架

Fig. 2 Framework of the proposed algorithm

3 实验分析

遥感图像、医学图像的分析理解都离不开图像分割。但它们常含有严重的噪声、具有多个待分割

区域和目标;对于不同应用来说,分割的目标还具有不同的性质,这些因素都使得分割任务较为艰巨。本文使用 Matlab 和 VC++ 混合编程实现算法,并应用于模拟噪声图像、SAR 图像、卫星图像和骨肿瘤核磁共振图像的分割中,均取得良好的分割效果。

本模型中主要涉及的参数包括:模糊聚类个数 n 、平滑约束模型和数据约束模型间的权重比 k 以及 Parzen 窗估计的窗宽 σ' 。其中模糊聚类的个数 n 由待分割图片的复杂度及噪声强弱决定,图片复杂度越高、噪声越强则需聚类数越多。权重比 k 则会影响分割结果的光滑程度, k 越大说明平滑约束的能力越强,从而分割得到的目标边缘越平滑。窗宽 σ' 对于概率密度函数的估计十分重要,如果窗宽过小则估计出的概率密度函数是一个不稳定的起伏很大的估计,有噪声误差;而窗宽过大又会使得估计过于平滑,分辨率低。实验中,选取待估计样本的标准差作为窗宽 σ' 得到了令人满意的结果。

3.1 模拟图像

图 3 中,(b)是以(a)为掩模得到的高斯噪声图像,其中圆内外像素均值同为 127,而方差分别为 10 和 20(将图片放大后可见);(c)为使用本文算法得到的分割结果。参数设置为聚类数 $n = 4$,权重比 $k = 3$ 。该结果表明,本文算法可以准确地将两种不同高斯分布下的像素点进行分割。

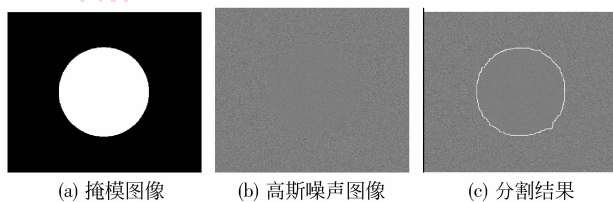


图 3 模拟噪声图像分割

Fig. 3 Segmentation result on a synthetic noise image

3.2 遥感图像分割

图 4(a)是用来检测海上石油泄露区域的 ERS-1 SAR 图像,(d)为陆海卫星图像。(b)和(e)分别是基于文献[2]的对照算法分割结果,(c)和(f)为本文算法的分割结果,与对比算法相比更加准确。参数设置均为聚类数 $n = 4$,权重比 $k = 10$ 。从算法的复杂性来看,改进后图(a)耗时由 0.982 s 略微增加到 1.240 s,图(d)则由 5.679 s 减少为 4.533 s。值得注意的是,在对照算法中我们也用模糊 C 均值算法替代文献[2]中的 Hard Constraints 进行种子点的

初始化,这样做既避免了人工交互对分割结果的影响,又保证了实验对比的公平性。

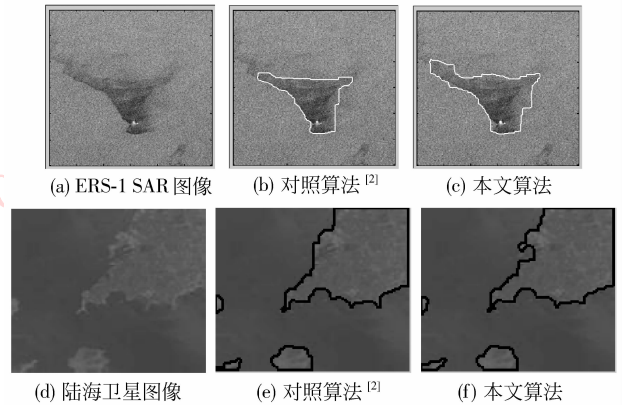


图 4 遥感图像分割

Fig. 4 Segmentation results on remote sensing images

3.3 医学图像分割

对 13 例 265×256 骨肿瘤 MRI 图像进行分割实验,其中包括 7 例纤维肉瘤型骨肉瘤(序号 1)和 6 例脂肪肉瘤病灶(序号 2),如图 5 为右大腿脂肪肉瘤的分割结果。对于所有骨肿瘤 MRI 序列,本模型参数设置均为聚类数 $n = 3$,权重比 $k = 100$ 。可以看到本文算法明显得到了更加精确的肿瘤边界。

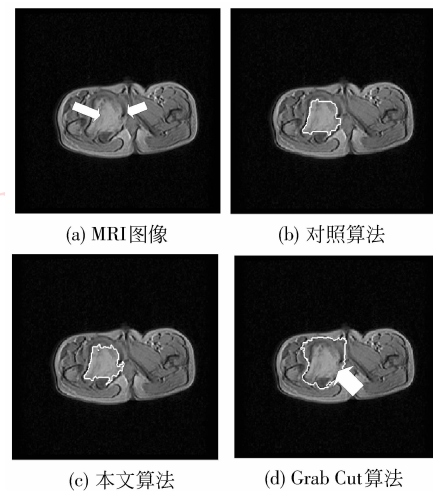


图 5 骨肿瘤分割

Fig. 5 Segmentation results on bone tumor MRI

由于 Grab Cut 算法有明显的误分割,故只将文献[2]算法、本文算法与专家手动分割结果相比较从而进行定量分析,统计结果如表 1。其中分割质量标准参数包括:特异性 $JM = \frac{GT \cap S_i}{GT \cup S_i}$ 、灵敏性

$PM = \frac{GT \cap S_i}{GT}$ 、Hausdorff 距离 H 和 Dice 相似性系数

$DSC = \frac{2(GT \cap S_i)}{|GT| + |S_i|}$ 。其中 GT 代表手动分割区域,

用以表示目标真实区域 (Ground truth); $S_i (i = 1, 2)$ 分别代表对照算法与本文提出算法的分割结果。可以看到, 虽然两种算法分割骨肿瘤均成功 ($DSC > 0.75$), 但综合所有 4 个参数的结果来看本文算法得到的结果更加精确。

表 1 分割质量评价

Tab. 1 Evaluation on segmentation result

算法	序号	JM/%	PM/%	H/像素	DSC
对照算法	1	73.6	91.0	21	0.85
	2	78.3	92.2	26	0.88
本文算法	1	81.7	87.5	12	0.90
	2	83.1	89.3	27	0.91

4 结 论

对基于 Graph Cuts 的分割算法进行改进。在贝叶斯框架下, 通过将模糊 C 均值聚类引入数据约束能量函数, 并使用 Parzen 窗估计概率密度函数构造平滑性约束, 提高了分割的准确性。最后将改进算法成功应用于 SAR 图像中的石油泄漏检测以及 MRI 图像中的骨肿瘤区域自动分割, 证明了算法具有有效性以及较高的应用价值。下一步的工作是如何在聚类数目未知的情况下利用纹理信息来实现真正的自动纹理分割, 并拓展至 3 维空间中。

参考文献 (References)

- [1] Shi J, Malik J. Normalized cuts and image segmentation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(8): 888-905.
- [2] Boykov Y, Funka-Lea G. Graph cuts and efficient N-D image segmentation [J]. International Journal of Computer Vision, 2006, 70(2): 109-131.
- [3] Boykov Y, Veksler O, Zabih R. Fast approximate energy minimization via graph cuts [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2001, 23(11): 1222-1239.
- [4] Rother C, Kolmogorov V, Blake A. GrabCut: interactive foreground extraction using iterated graph cuts [J]. ACM Transactions on Graphics, 2004, 23(3): 309-314.
- [5] Shim H, Lee S, Kim B, et al. 3-D Segmentation of articular cartilages by graph cuts using knee MR images from the osteoarthritis initiative [C] // Proceedings of SPIE Medical Imaging. Bellingham: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 2008; 691448. 1-691448. 9.
- [6] Wels M, Carneiro G, Apla A, et al. A discriminative model-constrained graph cuts approach to fully automated pediatric brain tumor segmentation in 3-D MRI [C] // Proceedings of the 11th International Conference on Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention. Heidelberg: Springer, 2008: 67-75.
- [7] Kim J S, Hong K S. Color-texture segmentation using unsupervised graph cuts [J]. Pattern Recognition, 2009, 42(5): 735-750.
- [8] Wu Bin, Wu Yadong, Zhang Hongying. Variational Partial Differential Equations based image restoration [M]. Beijing: Peking University Press, 2008: 162-181. [吴斌, 吴亚东, 张红英. 基于变分偏微分方程的图像复原技术 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2008: 162-181.]
- [9] Chen Shenyi, Qian Hui, Wu Zheng, et al. Multiresolution image matching method based on graph-cut and hausdorff distance [J]. Journal of Image and Graphics, 2008, 13(6): 1185-1190. [陈沈轶, 钱徽, 吴铮, 等. 基于图分割与 Hausdorff 距离的多分辨率影像匹配 [J]. 中国图象图形学报, 2008, 13(6): 1185-1190.]
- [10] Tappen M F, Freeman W T. Comparison of graph cuts with belief propagation for stereo, using identical MRF parameters [C] // Proceedings of the 9th International Conference on Computer Vision, Washington DC: IEEE Computer Society Press, 2003: 900-906.
- [11] Kolmogorov V, Zabih R. What energy functions can be minimized via graph cuts? [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(2): 147-159.
- [12] Boykov Y, Kolmogorov V. An experimental comparison of min-cut/max-flow algorithms for energy minimization in vision [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(9): 1124-1137.